

Aufgabe 33: Kubische Kraft - eine mathematische Betrachtung

Ein Teilchen bewege sich in einem Kraftfeld, dass invers mit der dritten Potenz des Abstandes vom Kraftzentrum variiert

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^4} \vec{r} \quad (1)$$

Bestimmen Sie das zugehörige Potential. Stellen Sie damit die Lagrange funktion auf und lösen Sie die resultierende Bewegungsgleichung für die Umlaufbahnen $r = r(\phi)$. Diskutieren Sie, wie die Umlaufbahnen von den Parametern des Systems abhängen.

Hinweise:

- Es kann hilfreich sein, die Variable $u = \frac{1}{r}$ zu verwenden.

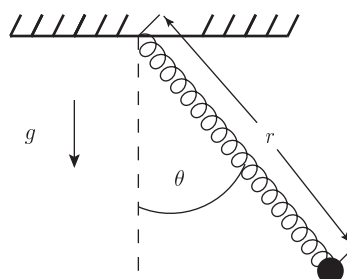
Aufgabe 34: Federpendel

Skript: 4.1 Kleine Schwingungen

Literatur: Fließbach Kapitel 6: Kleine Schwingungen & Aufgabe 2.8 (Doppelpendel)

Eine masselose Feder der Ruhelänge l_0 (ohne Spannung) ist an einem Ende mit einer Punktmasse m verbunden. Am anderen Ende sei die Feder so befestigt, dass sie im Schwerfeld hängt, wie in der Abbildung gezeigt. Das System, Feder und Masse, bewege sich nur in der vertikalen Ebene (x, z) .

Bestimmen Sie die Lagrange funktion und stellen Sie die Lagrange Gleichungen auf. Die Freiheitsgerade von interesse sind dabei der Winkel $\theta(t)$ sowie die relative länge $\lambda(t)$ (siehe Hinweis). Weiterhin, Linearisieren Sie die Differentialgleichungen für kleine Schwingungen und Auslenkungen, und lösen Sie mit Anfangsbedingungen $\theta(0) = 0$, $\lambda(0) = A$, $\dot{\theta} = \omega_p B$, $\dot{\lambda} = 0$. A, B seien dabei bekannte Konstanten.



Hinweise:

- Wir können annehmen, dass das Hookesche Gesetz gilt,

$$\vec{F}_{\text{hook}} = k(r - l_0)\vec{e}_z$$

wobei, k die Federkonstante, und $r - l_0$ die Auslenkung aus der Ruhelage (ohne Spannung) ist.

- Es ist hilfreich folgende Größen einzuführen

$$\lambda(t) = \frac{r(t) - r_0}{r_0}, \quad \omega_s^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_p^2 = \frac{g}{r_0},$$

mit r_0 ($\neq l_0$) der Ruhelänge der Feder mit angehängter Masse m .

- Wenn wir annehmen, dass Schwingungen (oder Auslenkungen) klein sind, müssen auch Ableitungen dieser klein sein, da ansonsten das System irgendwann keine kleinen Schwingungen (oder Auslenkungen) vollzieht. Vergleiche harmonischer Oszillator.

Aufgabe 35: Kraftstoß auf harmonischen Oszillator

Skript: 4.1 Kleine Schwingungen

Literatur: Fließbach Kapitel 6: Kleine Schwingungen & Aufgabe 2.8 (Doppelpendel)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator (ohne Reibung), auf den die zeitabhängige Kraft $F(t)$ wirke. Die Bewegungsgleichung lautet demnach:

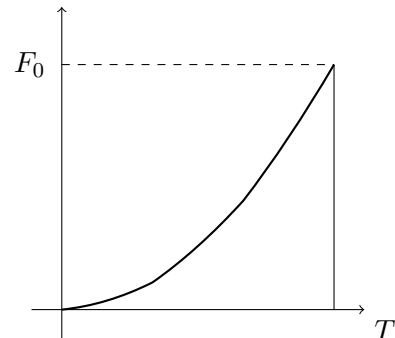
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Verifizieren Sie, dass

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t ds F(s) \sin[\omega_0(t - s)]$$

eine partikuläre Lösung ist.

Zur Zeit $t = 0$ ruhe der Oszillator in seiner Gleichgewichtslage. Er wird einem zeitabhängigen Kraftstoß ausgesetzt, der zwischen $t = 0$ und $t = T$ quadratisch auf F_0 ansteigt und dann abrupt abfällt. (siehe Abbildung.) Geben Sie die Amplitude des Oszillators für $t > 0$ an.



Hinweise:

- Die Leibnizregel hilft bei der Ableitung einer Integralfunktion:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right] = f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$